Colle du 17 mars : Équations différentielles non linéaires - Géométrie

21.1 Exercices

Exercice 0 : Tous les exercices de la semaine précédente.

Exercice 1 : Soit P une parabole telle que la distance de son foyer à son sommet vaut $1/4$. Soient A et B deux points distincts de P. Soit C l'intersection des tangentes à P en A et en B. Exprimer l'aire de ABC en fonction de la longueur de la médiane issue de C.

Exercice 2 : Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, notons $P_{a,b}$ la parabole d'équation $y = x^2 + ax + b$. Si (a, b) est tel que $P_{a,b}$ intersecte les axes de coordonnées en 3 points distincts, on note $C_{a,b}$ le cercle passant par ces trois points. Montrer que tous les cercles $C_{a,b}$ sont concourants.

Exercice 3 : Soit E une ellipse. Soient M et P deux points sur E tels que la tangente à l'ellipse en P est parallèle à (OM). Montrer que l'aire de OPM est indépendante des positions de M de P.

Exercice 4 : Soit H une hyperbole. Soit M un point de H. Notons P et Q les projetés orthogonaux de M sur les asymptotes de H. Montrer que le produit $MP \times MQ$ est indépendant de M.

Exercice 5 : Soit E une ellipse d'excentricité $\sqrt{5}/3$ et de petit axe de longueur 4. Soient F et F' ses foyers. Soit P un point de E tel que $PF = 2PF'$. Quelle est l'aire de PFF' ?

Exercice 6 : Soit E une ellipse de centre O. Soient A et B deux points de E non alignés avec O. Soit M l'intersection des tangentes à E en A et B. Montrer que le milieu de $[AB]$ est sur la droite (OM).

Exercice 7 : Donner la développée d'une ellipse, c'est-à-dire le lieu de ses centres de courbure.

Exercice 8 : Soit P une parabole. Soit C_0 un cercle bitangent à la parabole. On trace alors un cercle C_1 tangent à C_0, bitangent à la parabole et plus proche du sommet de la parabole que C_0. On répète cette opération pour obtenir C_2, C_3,.... Combien de cercles peut-on dessiner ainsi ?

Exercice 9 : Soit P une parabole. Considérons trois points distincts sur P. Les tangentes à P par ces points forment un triangle. Montrer que son orthocentre est sur la droite directrice de P.

Exercice 10 : Soit $F : [0, T] \to \mathbb{R}^2, s \mapsto (x(s), y(s))$ un arc paramétré par longueur d'arc de classe C^3, qui correspond à une courbe fermée simple. On suppose que la courbure γ est positive. On admet que, sous de telles hypothèses, le plan privé de l'arc géométrique de F est constitué de deux composantes connexes, une bornée et une non bornée, et que la composante connexe bornée est convexe de frontière l'arc géométrique de F.
1. Montrer que $\int_0^T x\gamma' = \int_0^T y\gamma' = 0$.
2. Montrer que γ a au moins quatre points critiques.

Exercice 11 : Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Montrer que les projetés orthogonaux de D sur (AB), (BC) et (CA) sont alignés si, et seulement si, D est situé sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 12 : Soient A et B deux points du plan. On cosidère deux points C et D, qui varient sur un même demi-cercle de diamètre $[AB]$ de sorte que CD est constante. Soient $E = (AC) \cap (BD)$ et $F = (AD) \cap (BC)$. Montrer que la droite (EF) reste perpendiculaire à (AB) et que la longueur EF est constante.

Exercice 13 : Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit P un point situé sur le cercle tangent à (AB) en B et à (AC) en C. On suppose que P est à l'intérieur de ABC. On appelle a, b et c les distances de P à (BC), (AC) et (AB) respectivement. Montrer que $a^2 = bc$.

Exercice 14 : Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigüs. Soit H son orthocentre. On suppose que $AB = CH$. Que vaut l'angle $\widehat{ACB}$?

Exercice 15 : Soit ABC un triangle tel que a est la moyenne de b et c. Soient r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit. Montrer que $0 \leq \hat{A} \leq \frac{\pi}{3}$, que la hauteur issue de A mesure $3r$ et que la distance de centre du cercle circonscrit au côté (BC) est $R - r$.